CONCOURS NATIONAL – MAROC - 1995
EHTP-EMI-ENIM-ENPL-ENSEM-ENSIAS-IAV-INPT
Epreuve d'analyse

Objectifs et données du problème .

Soient a, b, c, d des réels fixés tels que : $(a^2+b^2)(c^2+d^2) \neq 0$, et Q une application continue de [0,1] dans $\mathbb{R}$.
Pour toute application h continue de [0,1] dans $\mathbb{C}$, on se propose d'étudier quelques propriétés

des solutions du problème : L_h $\begin{cases} -y''+Qy = h \\ ay(0) + by'(0) = 0 \\ cy(1)+ dy'(1) = 0 . \end{cases}$

On note : E l'espace des applications continues de [0,1] dans $\mathbb{C}$,
E_2 l'espace des applications g de classe C^2 de [0,1] dans $\mathbb{C}$ qui vérifient :
$ag(0) + bg'(0) = 0$ et $cg(1) + dg'(1) = 0$,
D l'application de E_2 dans E définie par : $\forall g \in E_2, \forall x \in [0,1]$, $D(g)(x) = -g''(x) + Q(x)g(x)$.

Les espaces E et E_2 sont munis du produit scalaire $< , >$ défini par :
$<f,g> = \int_0^1 \overline{f(t)}\, g(t)dt$, de norme associée $\| \ \|_2$.

Pour tout f de E , on note $\| f \|_\infty = \text{Sup}\left(|f(t)| ; 0 \leq t \leq 1 \right)$.

PREMIERE PARTIE

Etude de l'opérateur D .

1- Montrer que D est une application linéaire vérifiant :
$\forall f,g \in E_2$ $<D(f),g> = < f,D(g)>$.
2- On appelle valeur propre de D tout complexe λ pour lequel il existe une application f non nulle de E_2 vérifiant $D(f) = \lambda f$, et sous-espace propre associé à λ l'ensemble $\{f \in E_2 , D(f) = \lambda f\}$.
Etablir que les valeurs propres de D sont réelles et que les sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux .
3- Démontrer que tout sous-espace propre est de dimension 1 .
4- Soient u et v deux réels positifs fixés et y une fonction réelle quelconque de classe C^1 sur [0,1] .

a) Etablir pour toute constante A strictement positive l'inégalité :

$$\forall x \in [0,1] , \ y^2(1) - y^2(x) \leq A \int_0^1 y^2(t)\, dt + \frac{1}{A}\int_0^1 y'^2(t)dt .$$

b) En déduire : $y^2(1) \leq (1+A)\int_0^1 y^2(t)dt + \frac{1}{A}\int_0^1 y'^2(t)dt$.
Etablir une inégalité analogue majorant $y^2(0)$.
c) Montrer qu'il existe une constante M, indépendante de y, telle que:

$$u\, y^2(1) + v\, y^2(0) \leq M \int_0^1 y^2(t)\, dt + \int_0^1 y'^2(t)dt .$$

5- Soit λ une valeur propre de D .
a) Montrer qu' il existe une fonction réelle qui engendre le sous-espace propre associé à λ .
b) Exploiter le produit scalaire $<D(y_\lambda) - \lambda y_\lambda, y_\lambda>$ pour établir l'existence de α et β indépendants de λ vérifiant :

$$\alpha y_\lambda^2(1) + \beta y_\lambda^2(0) = \int_0^1 (Q(t) - \lambda y_\lambda^2(t) + y'^2_\lambda(t))dt .$$

6- A l'aide des questions 4 et 5, montrer que toute valeur propre de D est minorée par $-\|Q\|_\infty - M$.

Infty08

DEUXIEME PARTIE

Existence et propriétés de D^{-1}.

Dans toute cette partie , l'opérateur D est supposé injectif .

1- Montrer que l'équation homogène : $-y''+Qy = 0$ admet une base de solutions (Ψ_1,Ψ_2) vérifiant :

$$\psi_1'(0) = a\ ,\ \psi_1(0) = -b\ ,\ c\psi_2(1) + d\psi_2'(1) = 0 \text{ et } \psi_1'\psi_2 - \psi_1\psi_2' = 1.$$

On vérifiera que , pour toute base de solutions (y_1,y_2), la quantité $y_1'y_2 - y_1y_2'$ est une constante non nulle .

2- On note K l'application définie sur $[0,1]^2$ par :

$$K(x,t) = \begin{cases} \psi_2(x)\psi_1(t) \text{ si } 0 \le t \le x \le 1 \\ K(t,x) \quad \text{si } 0 \le x \le t \le 1 \end{cases}$$

Montrer que la restriction de K au triangle $T = \{ (t,x) ; 0 \le t \le x \le 1 \}$ est continue puis que K l'est aussi sur $[0,1]^2$.

3- Pour tout g de E , on note ϕ (g) l' application définie sur [0,1] par :

$$\phi(g)(x) = \int_0^1 K(x,t)g(t)dt.$$

a) Vérifier que ϕ est une application linéaire de E dans E_2 .

b) Etablir que, pour tout h de E , le problème L_h admet une solution unique , à savoir $\phi(h)$.

4- Vérifier que ϕ et D sont deux isomorphismes réciproques .

(Ind : considérer le problème $L_{D(f)}$ pour f élément de E_2 .)

5- Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de Φ en fonction des éléments propres de D .

(μ est valeur propre de ϕ s'il existe g non nulle de E telle que $\phi(g) = \mu g$, le sous-espace propre associé étant l'ensemble $\{g \in E, \phi(g) = \mu g \}$)

6- Etablir que : $\forall f,g \in E$, $<\phi(f),g> = <f,\phi(g)>$.

TROISIEME PARTIE

Etude d'un cas particulier .

On considère ici le problème : $L_h \begin{cases} -y'' = h \\ y(0) = y'(1) = 0 \end{cases}$ où h est une application continue de [0,1] dans $\mathbb{C}$.

1- Déterminer les valeurs propres de D . Vérifier que D est injectif .

2- Montrer que l'application K est définie par : $K(x,t) = Inf(x,t)$.

3- On note $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des valeurs propres de ϕ rangées par ordre décroissant , φ_n une fonction propre unitaire réelle associée à μ_n , $(\|\varphi_n\|_2 = 1)$ et : $\forall f \in E$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = <\varphi_n , f>$.

a) Exprimer , à l'aide des φ_n et de f , la projection orthogonale de f sur le sous-espace engendré par les applications $\varphi_0 , \varphi_1 , ... , \varphi_r$; $r \in \mathbb{N}$.

b) En déduire l'existence de la somme : $\sum_0^{+\infty} |a_n(f)|^2$ pour tout f de E .

4 - Montrer que , pour tout f de E , la série $\sum a_n(\phi(f))\varphi_n(x)$ est uniformément convergente sur [0,1] .

En déduire la convergence uniforme de $\sum a_n(g)\varphi_n(x)$ pour tout g de E_2 .

5- Pour tout g de E_2 , on veut prouver le résultat : $\forall x \in [0,1]$, $g(x) = \sum_0^{+\infty} a_n(g)\varphi_n(x)$.

A cette fin , on désigne par G l'application impaire de période 4 définie par :

$$G(x) = \begin{cases} g(x) \quad \text{si } 0 \le x \le 1 \\ g(2-x) \text{ si } 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

Infty08

et on note H l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = G\left(\frac{2x}{\pi}\right)$.

a) Exprimer les coefficients de Fourier de H à l'aide des $a_n(g)$.

b) En déduire le résultat annoncé et , pour tout f de E , la somme de la série $\sum a_n(\phi(f))\varphi_n(x)$.

6- Pour tout x fixé dans [0,1] , on note K_x l'application : $t \longrightarrow K(x,t)$.
Exprimer $a_n(K_x)$ en fonction des éléments propres de ϕ et établir les égalités suivantes :

$$\forall y \in [0,1] , \phi(K_x)(y) = \int_0^1 K(x,t)K(y,t)dt = \sum_0^{+\infty} \mu_n^2 \varphi_n(x)\varphi_n(y) .$$

$$\sum_0^{+\infty} \mu_n^2 = \int_0^1 \int_0^1 K(x,t)^2 dt\, dx .$$

7- On note : $L(x,t) = \sum_0^{+\infty} \mu_n \varphi_n(x)\varphi_n(t)$. Montrer que, pour tout f de E , on a :

$$\forall x \in [0,1], \phi(f)(x) = \int_0^1 L(x,t)f(t)dt .$$

En déduire L = K , la somme de la série $\sum \mu_n \varphi_n^2(x)$, et l'égalité: $\sum_0^{+\infty} \mu_n = \int_0^1 K(x,x)dt$.

8- Reprendre sommairement l'étude précédente pour le problème :

$$\begin{cases} -y'' + \alpha^2 y = h \\ y'(0) = y'(1) = 0 \end{cases} , \ \alpha > 0 .$$

En déduire la valeur de $\sum_0^{\infty} \frac{1}{n^2\pi^2 + \alpha^2}$ et retrouver celle de $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Fin de l'épreuve .

Infty08